1. Übung Kurvendiskussion von S-Funktionen

Aufgabe 1.1.1

a) Verhalten im Unendlichen

$$x_T(t) = \frac{15}{1+e^{-0,2t}}$$

$$t \to \infty \quad \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{1}{e^{0,2t}} \Rightarrow 0{,}2t \to \infty \quad \Rightarrow e^{0,2t} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{e^{0,2t}} \to 0$$

$$x_T(t) \Rightarrow \frac{15}{1} = 15$$

b) Wendepunkte

$$x''_T(t) = \frac{3 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0{,}2) \cdot \left(1+e^{-0,2t}\right)^2 - 3 \cdot e^{-0,2t} \cdot 2 \cdot \left(1+e^{-0,2t}\right) \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0{,}2)}{\left(1+e^{-0,2t}\right)^4}$$

$$x''_T(t) = 0$$

$$0 = \frac{3 \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0,2t} \cdot \left(1+e^{-0,2t}\right) \cdot \left(1+e^{-0,2t} - 2e^{-0,2t}\right)}{\left(1+e^{-0,2t}\right)^4}$$

$$0 = 1 - e^{-0,2t} \Rightarrow 1 = e^{-0,2t} \Rightarrow \ln(\ ) \quad 0 = -0{,}2t \Rightarrow t = 0$$

$$x_T(0) = \frac{15}{2} = 75$$

c) Linearisierung

$$x_T(t) = \frac{15}{1+e^{-0,2t}} \qquad \frac{x_T(t)}{15} = \frac{1}{1+e^{-0,2t}} \qquad \frac{15}{x_T(t)} = 1 + e^{-0,2t} \qquad \frac{15}{x_T(t)} - 1 = e^{-0,2t} \mapsto \ln(\ )$$

$$\ln\left(\frac{15}{x_T(t)} - 1\right) = -0{,}2 \cdot t$$

2. Übung Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1.3.5

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$
$$\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{und} \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

a)

$$\sum_{t=1}^{n} \cos \frac{2\pi i}{n} \cdot t = 0 \quad \text{für} \quad n = 4 \quad i = 1,2$$

$i = 1:$

$$\cos \frac{2\pi}{4} \cdot 1 + \cos \frac{2\pi}{4} \cdot 2 + \cos \frac{2\pi}{4} \cdot 3 + \cos \frac{2\pi}{4} \cdot 4$$
$$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3}{2}\pi + \cos 2\pi = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$$

$i = 2:$

$$\cos \frac{2\pi \cdot 2}{4} + + \cos \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot 2 + \cos \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot 3 + \cos \frac{2\pi \cdot 2}{4} \cdot 4 = 0 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

b)

$$\sum_{t=1}^{n} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t \cos \frac{2\pi j}{n} \cdot t = 0 \quad \text{für} \quad n = 4$$

$i = 1, j = 1$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 1t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 1t\right) = \frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{2\pi}{4} t\right) = 0$$

$i = 1, j = 2$

$$\sin \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot t \cos \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot t$$

$$t \text{ ungerade} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot t = -1 \quad t \text{ gerade} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot t = +1$$

$$t = 1: \quad \sin \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \quad (-1) \Rightarrow -1 \quad t = 2: \quad \sin \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \quad (+1) \Rightarrow 0$$

$$t = 3: \quad \sin \frac{2\pi}{4} \cdot 3 \quad (-1) \Rightarrow +1 \quad t = 4: \quad \sin \frac{2\pi}{4} \cdot 4 \quad (+1) \Rightarrow 0$$

Insgesamt ergibt sich null.

c)

$$\sum \cos\frac{2\pi i}{n}\cdot t\cdot\cos\frac{2\pi j}{n}\cdot t = 0 \Leftrightarrow i <> j \quad \text{oder} = n \Leftrightarrow i = j$$

$n = 4$

$i = 1, j = 2$

$$\sum \cos\frac{2\pi}{4}\cdot t\cdot\cos\frac{2\pi\cdot 2}{4}\cdot t$$

$t = 1,2,3,4$

$$= (0\cdot -1) + (-1\cdot 1) + (0\cdot -1) + (1\cdot 1) = 0$$

$i = 1, j = 1:$

$$\cos^2\frac{2\pi}{4} + \cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2 + \cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 3 + \cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 4$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{2\pi}{2} + \cos^2\frac{3\pi}{2} + \cos^2\frac{4\pi}{2} = 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2$$

$i = 2, j = 2:$

$$\cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 1 + \cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 2 + \cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 3 + \cos^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 4$$

$$= (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$$

d)

$$\sum \sin\frac{2\pi i}{n} t\cdot\sin\frac{2\pi j}{n} t$$

$n = 4$

$i = 1, j = 1:$

$$\sin\frac{2\pi}{4}\cdot 1 \sin\frac{2\pi}{4}\cdot 2 + \sin\frac{2\pi}{4}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{4}\cdot 4 + \sin\frac{2\pi}{4}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{4} 2\cdot 3 + \sin\frac{2\pi}{4}\cdot 4\sin\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 4$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0$$

$i = 1, j = 1:$

$$\sin^2\frac{2\pi}{4} + \sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2 + \sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 3 + \sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 4 = 0 + 1 + 0 + 1 = 2 = \frac{4}{2}$$

$i = 2, j = 2:$

$$\sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2 + \sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 2 + \sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 3 + \sin^2\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 4 = 4 = n$$

e)

$$\sum_{t=1}^{n} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t = 0$$

i ungerade

$$= \sum_{t=1}^{n/2} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t + \sum_{t=n/2+1}^{n} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t$$

$$= \sum_{t=1}^{n/2} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t + \sum_{t=1}^{n/2} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t \cdot (n/2 + t)$$

Additionstheorem sin(x + y)

$$= \sum_{t=1}^{n/2} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t + \sum_{t=1}^{n/2} (-1)^{i} \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot t$$

$$= \sum_{t=1}^{n/2} \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot (1 + (-1)^{i})$$

$$= 0.$$

3. Übung Transformationen

Aufgabe 1.4.2

a) Länge des Saisonzyklus m = 4

multiplikative Verknüpfung $(1 - B^4) \ln x_t = 4 \cdot \ln 2$

additive Verknüpfung $(1 - B)\{\ln [(1 - B^4)x_t]\} = \ln 2$

b) Länge des Saisonzyklus m = 2

multiplikative Verknüpfung $(1 - B^2)^2 x_t^2 = 0$

additive Verknüpfung nicht realisierbar

4. Übung Restkomponente

Aufgabe 1.5.1

a) Berechnung aus den Daten $r_1 = p_1 = -0{,}343$ $r_2 = -0{,}172$

b) Berechnung von p^2 aus den Yule-Walker-Gleichngen für

$$x_t = d_1^{(2)} \cdot x_{t-1} + d_2^{(2)} \cdot x_{t-2} + a_t \qquad \text{mit} \qquad d_2^{(2)} = p_2$$

$$r_1 = d_1^{(2)} \cdot 1 + d_2^{(2)} \cdot r_1$$

$$r_2 = d_1^{(2)} \cdot r_1 + d_2^{(2)} \cdot 1$$

Lösung $p_2 = -0{,}329$

Aufgabe 1.5.2

Modellgleichung $x_t = 0{,}5 \cdot x_{t-1} + d_2 \cdot x_{t-2} + a_t$

Charakteristische Gleichung $\alpha^2 - 0{,}5 \cdot \alpha - d_2 = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + d_2} \quad |\alpha_{1,2}| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + d_2} < 1$$

Fall 1: Reelle Nullstellen

a) $d_2 > -1/16$

b) Umformung der rechten Ungleichung

$$\sqrt{\frac{1}{16} + d_2} < 1 - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{16} + d_2 < \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad d_2 < \frac{1}{2}$$

c) Umformung der linken Ungleichung

$$-1-\frac{1}{4}<-\sqrt{\frac{1}{16}+d_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{25}{16}>\frac{1}{16}+d_2 \quad\Rightarrow\quad d_2<\frac{24}{16}$$

Zusammenfassung aus a), b) und c) im Fall 1

$-1/16 < d_2 < 1/2$.

Fall 2: Komplexe Nullstellen

a) $d_2 < -1/16$

b)

$$\alpha_{1,2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{-\frac{1}{16}-d_2}\cdot i$$

$$\left|\alpha_{1,2}\right|=+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{16}-d_2\right)}=\sqrt{-d_2}<1 \quad\Rightarrow\quad d_2>-1$$

Zusammenfassung aus a) und b) im Fall 2

$-1 < d_2 < -1/16$.

Die Vereinigung der Ungleichungen aus Fall 1 und Fall 2 führt auf

$-1 < d_2 < 1/2$.

5. Übung Analyse stationärer Prozesse

Aufgabe 2.2.1

Modellgleichung $X_t = 0{,}5\cdot X_{t-1} + 0{,}1\cdot X_{t-2} + a_t$

Charakteristische Gleichung $\alpha^2 = 0{,}5\cdot\alpha + 0{,}1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = 0{,}65 \qquad \alpha_2 = -0{,}15$

$\Rightarrow$ Stationarität

Erwartungswert $E(X_t) = 0{,}5 \cdot E(X_{t-1}) + 0{,}1 \cdot E(X_{t-2}) + 1$

$\mu = 0{,}5 \cdot \mu + 0{,}1 \cdot \mu + 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2{,}5$

Varianz $Var(X_t) = 0{,}5^2 \cdot Var(X_{t-1}) + 0{,}1^2 \cdot Var(X_{t-2}) + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot Cov(X_{t-1}, X_{t-2}) + 1$

$\sigma^2 = 0{,}5^2 \cdot \sigma^2 + 0{,}1^2 \cdot \sigma^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot Cov(X_{t-1}, X_{t-2}) + 1$

Berechnung der Kovarianz aus der Autokorrelation ρ_1 mit Hilfe der Yule-Walker-Gleichungen

$\rho_1 = d_1 \cdot \rho_0 + d_2 \cdot \rho_{-1}$

$\rho_2 = d_1 \cdot \rho_1 + d_2 \cdot \rho_0$

$\Rightarrow \quad \rho_1 = d_1/(1 - d_2) = 0{,}5/(1 - 0{,}1) = 0{,}56$

$\rho_1 = Cov(X_{t-1}, X_{t-2})/\sigma^2$

$\Rightarrow \quad Cov(X_{t-1}, X_{t-2}) = 0{,}56 \cdot \sigma^2$

Damit ergibt sich als Varianz $\sigma^2 = 1.46$.

Aufgabe 2.2.6

$r_1 = 0{,}9 \qquad r_2 = 0{,}84 \qquad r_3 = 0{,}78$

Für AR(1)-Prozesse muss $r_j = r_1^j$ gelten. Das trifft offenbar nicht zu.
Für einen AR(2)-Prozess müssen die entsprechenden Yule-Walker-Gleichungen mit den Gewichten d_1 und d_2 erfüllt sein, d.h.

$\rho_1 = d_1 \cdot \rho_0 + d_2 \cdot \rho_{-1}$

$\rho_2 = d_1 \cdot \rho_1 + d_2 \cdot \rho_0$

$\rho_3 = d_1 \cdot \rho_2 + d_2 \cdot \rho_1$.

Es werden die geschätzten Werte r_j eingesetzt:

$$0{,}9 = d_1 \cdot 1 + d_2 \cdot 0{,}9$$

$$0{,}84 = d_1 \cdot 0{,}9 + d_2 \cdot 1$$

$$0{,}78 = d_1 \cdot 0{,}84 + d_2 \cdot 0{,}9.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man $d_1 = 0{,}76$ und $d_2 = 0{,}16$. Eingesetzt in Gleichung drei ergibt sich tatsächlich 0,78 = 0,78. Offensichtlich handelt es sich um einen AR(2)-Prozess.

6. Übung Analyse instationärer Prozesse

Aufgabe 2.3.4

$$X_t = 2 + X_{t-1} + a_t \qquad \text{mit} \qquad X_{-i} = a_{-i} = 0 \qquad \text{für} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Durch Rekursion ergibt sich folgende Darstellung

$$X_t = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + X_0 + a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots + a_1$$

$$= t \cdot 2 + a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots + a_1$$

$$E(X_t \mid X_{-i} = a_{-i} = 0, i = 0, 1, 2, \ldots) = t \cdot 2 + t \cdot 0$$

$$Var(X_t \mid X_{-i} = a_{-i} = 0, i = 0, 1, 2, \ldots) = t \cdot \sigma_a^2 = t \cdot 2.$$

7. Übung Prognose instationärer Prozesse

Aufgabe 2.4.1

$$X_t = 0{,}5 \cdot X_{t-1} + a_t - 0{,}4 \cdot a_{t-1}$$

Die MA-Darstellung lautet

$$X_t = \frac{1 - 0{,}4 \cdot B}{1 - 0{,}5 \cdot B} a_t = 1 + 0{,}1 \cdot B + 0{,}05 \cdot B^2 + \ldots \quad .$$

Die Berechnung der Gewichte ergibt sich aus einer Polynomdivision.

Die Punktprognose folgt aus

$$\hat{X}_t(1) = 0{,}5 \cdot X_t - 0{,}4 \cdot (X_t - \hat{X}_{t-1}(1)) = 0{,}5 \cdot 10 - 0{,}4 \cdot (10 - 9) = 4{,}6$$
$$\hat{X}_t(2) = 0{,}5 \cdot \hat{X}_t(1) = 0{,}5 \cdot 4{,}6 = 2{,}3$$
$$\hat{X}_t(3) = 0{,}5 \cdot \hat{X}_t(2) = 0{,}5^2 \cdot 4{,}6 = 1{,}15.$$

Die Varianzen $V^2(h)$ des Prognosefehlers ergeben sich aus

$$V^2(1) = \sigma_a^2 = 1$$

$$V^2(2) = 1 \cdot (1 + 0{,}1^2)$$

$$V^2(3) = 1 \cdot (1 + 0{,}1^2 + 0{,}05^2)$$

und mit

$$\hat{X}_t(h) \pm 1{,}96 \cdot V(h)$$

die Intervallprognosen.